

ИЗДЕРЖКИ, ПРИБЫЛЬ, РЕНТАБЕЛЬНОСТЬ И ЦЕНА В МОДЕЛИ ПРОСТОГО ВОСПРОИЗВОДСТВА С ТРЕМЯ ПОДРАЗДЕЛЕНИЯМИ И ОБМЕНОМ ПРОДУКЦИИ ПО ТРУДОВОЙ СТОИМОСТИ¹.

Автор: Пушной Григорий Сергеевич.

Июль 2016

E-mail: gpushnoi@yahoo.com

¹ Автор выражает признательность Валерию Васильевичу Калюжному, который в ходе диспута на Форуме «Социнтегрум» указал на допущенную мной ошибку в первоначальном варианте статьи. Ему же принадлежит и сама идея, положенная в основу этой статьи – рассмотреть взаимосвязь между издержками, прибылью и рентабельностью на примере модели простого воспроизводства с тремя подразделениями.

АННОТАЦИЯ.

В статье рассмотрена классическая модель экономики с простым воспроизводством, в которой выделены три подразделения: средства производства, предметы потребления рабочих и предметы потребления капиталистов. Предполагается, что реализация продукции подразделений осуществляется по трудовым стоимостям, а затраты труда уже сведены к абстрактному труду. Масштаб цен выбран так, чтобы цены были численно равны трудовым стоимостям продукции. Акцент сделан на исследовании влияния технического прогресса на динамику цен, издержек производства, рентабельности и прибыли. Доказывается, что экономия на средствах производства приводят к снижению цен и издержек производства и росту рентабельности (отношению прибыли к издержкам производства). В первом и втором подразделениях при этом увеличивается ещё и прибыль в единице продукции. Экономия живого труда также всегда приводит к снижению цен и издержек производства. При этом в первом подразделении всегда будет рост рентабельности, а в третьем подразделении – падение рентабельности и прибыли в единице продукции. Прибыль в единице продукции в первом и втором подразделениях может или расти, или падать, вследствие экономии живого труда. При этом рентабельность во втором подразделении также может расти или падать. В статье дана формулировка условий роста или падения прибыли в единице продукции. Рассмотрен долгосрочный технический прогресс, основанный на экономии живого труда.

ABSTRACT.

Three-departments model (“means of production”, “subsistence goods” and “luxury”) of simple production with the exchange on the basis of “labor values” is considered. The paper is devoted to the problem of interdependence between “cost”, “price”, “profit” and “profitability” (i. e. “profit” per “cost” ratio) in the different departments. The influence of technical progress (i. e. the economy of “means of production” and the economy of “direct labor”) onto these economic variables is analyzed.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим модель экономики с тремя подразделениями: 1) «средства производства», 2) «предметы потребления», 3) «роскошь». Вводим обозначения:

$l_1; l_2; l_3$ - прямые затраты труда на производство единицы в каждом подразделении,

$L_1; L_2; L_3$ - овеществлённый в единицах продукции труд (трудовые стоимости единиц продукции разных подразделений),

$a_1; a_2; a_3$ - количество единиц «средств производства», необходимых для производства единицы продукта в каждом подразделении,

w - количество единиц предметов потребления, которые рабочие получают в качестве оплаты за единичный выполненный труд (реальная оплата труда),

$X_1; X_2; X_3$ - выпуски продукции в подразделениях, то есть, количество единиц продукции, производящихся в каждом подразделении в течение определённого промежутка времени (года, например).

Данная Модель, конечно, упрощает реальность, так как в ней предполагается однородность продукции, выпускаемой внутри каждого подразделения, тогда как на самом деле каждое подразделение производит разнородные продукты. Придать смысл коэффициентам $a_1; a_2; a_3$ и w однако можно и в случае выпуска разнородной продукции каждым подразделением, если предположить, что все рабочие потребляют примерно структурно одинаковые наборы предметов потребления, а каждое подразделение приобретает средства производства тоже в некотором определенном структурном составе. Тогда выпуск каждого подразделения описывается как производство составного товара (например, для первого подразделения - 100 машин + 200 единиц электроэнергии + 1000 тонн металла... ИЛИ для второго подразделения – 1 кг хлеба + 200 грамм сахара + 1 рубашка + ...). Если подразделения (или рабочие) потребляют единицы составного товара, то предлагаемая модель будет реалистичной. И в этом случае коэффициенты $a_1; a_2; a_3$ и w выражаются в единицах составного товара первого или второго подразделений.

Подробнее об этом – в статье Пушной (2014):

Будем рассматривать цены, масштаб которых выбран так, что цены численно совпадают с трудовыми стоимостями товаров, то есть равны $L_1; L_2; L_3$. Полная система уравнений состоит из уравнений для цен (трудовых стоимостей) и уравнений для выпусков продукции.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЦЕН.

$$\begin{cases} L_1 a_1 + l_1 = L_1 \\ L_1 a_2 + l_2 = L_2 \\ L_1 a_3 + l_3 = L_3 \end{cases} \quad (1)$$

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЫПУСКОВ.

$$\begin{cases} a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = X_1 \\ w \cdot (l_1 X_1 + l_2 X_2 + l_3 X_3) = X_2 \end{cases} \quad (2)$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (1):

$$L_1 = \frac{l_1}{1-a_1} \quad (3)$$

$$L_2 = l_2 + \frac{l_1 a_2}{1-a_1} \quad (4)$$

$$L_3 = l_3 + \frac{l_1 a_3}{1-a_1} \quad (5)$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (2):

$$X_{31} \equiv \frac{X_3}{X_1} = \frac{a_2 w l_1 + (w l_2 - 1)(1-a_1)}{(w l_2 - 1)a_3 - a_2 w l_3} \quad (6)$$

$$X_{21} \equiv \frac{X_2}{X_1} = \frac{1-a_1 - a_3 X_{31}}{a_2} \quad (7)$$

Выпуск X_1 можно задавать произвольно, тогда выпуски $X_2; X_3$ находятся по формулам (6)-(7).

Напишем выражения для цен $Ц_1; Ц_2; Ц_3$, издержек производства (себестоимости) $И_1; И_2; И_3$, прибыли $П_1; П_2; П_3$ и рентабельности (отношениях прибылей к издержкам) $P_1; P_2; P_3$.

ЦЕНЫ – формулы (3) – (5).

$$Ц_1 = \frac{l_1}{1-a_1} \quad (8)$$

$$Ц_2 = l_2 + \frac{l_1 a_2}{1-a_1} \quad (9)$$

$$Ц_3 = l_3 + \frac{l_1 a_3}{1-a_1} \quad (10)$$

ПРИБЫЛИ:

$$П_1 = \underbrace{l_1}_{\text{затраченный труд}} - \underbrace{(w l_1) \cdot L_2}_{\substack{\text{труд, овеществленный} \\ \text{в предметах потребления} \\ \text{рабочих, которые они покупают} \\ \text{на свою зарплату}}} = (1-\tilde{w})l_1 \quad (11)$$

Здесь использовано обозначение:

$$\tilde{w} = w \cdot L_2 = w \cdot \left(l_2 + \frac{l_1 a_2}{1-a_1} \right) = \frac{w \cdot [l_2 (1-a_1) + l_1 a_2]}{1-a_1} \quad (12)$$

Параметр \tilde{w} - это труд, овеществлённый в предметах потребления рабочих, которые они покупают на оплату единичного труда (например, за почасовую оплату своего труда).

Аналогично:

$$П_2 = (1-\tilde{w})l_2 \quad (13)$$

$$П_3 = (1-\tilde{w})l_3 \quad (14)$$

НОРМА ПРИБАВОЧНОЙ СТОИМОСТИ:

$$m = \frac{1-\tilde{w}}{\tilde{w}} > 0 \quad \tilde{w} < 1 \quad (15)$$

ИЗДЕРЖКИ ПРОИЗВОДСТВА (себестоимость):

$$I_1 = \frac{a_1 l_1}{1 - a_1} + \tilde{w} l_1 \quad (16)$$

$$I_2 = \frac{a_2 l_1}{1 - a_1} + \tilde{w} l_2 \quad (17)$$

$$I_3 = \frac{a_3 l_1}{1 - a_1} + \tilde{w} l_3 \quad (18)$$

Цены, прибыли и издержки производства выражены в виде количества труда. Поскольку масштаб цен выбран так, что цены численно равны овеществлённому труду (например, 1 рубль = 1 часу труда), то формулы для цен, прибылей и издержек дают также эти величины в денежном выражении.

РЕНТАБЕЛЬНОСТИ ПРОИЗВОДСТВА:

$$P_1 = \frac{(1 - \tilde{w})(1 - a_1)}{\tilde{w} + a_1(1 - \tilde{w})} \quad (19)$$

$$P_2 = \frac{(1 - \tilde{w})(1 - a_1) l_2}{a_2 l_1 + \tilde{w} l_2 (1 - a_1)} \quad (20)$$

$$P_3 = \frac{(1 - \tilde{w})(1 - a_1) l_3}{a_3 l_1 + \tilde{w} l_3 (1 - a_1)} \quad (21)$$

Рентабельность рассчитана как отношение прибыли к издержкам производства в соответствующем подразделении². Приведённые выше формулы перепишем, подставив вместо параметра \tilde{w} формулу (12). Сделав это, получим следующие выражения для прибылей, издержек и рентабельности в разных подразделениях.

Подразделение – I (производство средств производства).

$$\Pi_1 = -\frac{w a_2}{1 - a_1} \cdot l_1^2 + (1 - w l_2) \cdot l_1 \quad (22)$$

$$I_1 = \frac{w a_2}{1 - a_1} \cdot l_1^2 + \left(\frac{a_1}{1 - a_1} + w l_2 \right) \cdot l_1 \quad (23)$$

Очевидно, что выполняется тождество $I_1 + \Pi_1 = C_1$.

Поделив (22) на (23), получаем рентабельность в первом подразделении:

$$P_1 = \frac{(1 - w l_2)(1 - a_1) - w a_2 l_1}{w a_2 l_1 + a_1 + w l_2 (1 - a_1)} \quad (24)$$

Подразделение – II (производство предметов потребления).

$$\Pi_2 = -w l_2^2 + \left(1 - \frac{a_2 w l_1}{1 - a_1} \right) \cdot l_2 \quad (25)$$

$$I_2 = w l_2^2 + \left(\frac{a_2 w l_1}{1 - a_1} \right) \cdot l_2 + \frac{a_2 l_1}{1 - a_1} \quad (26)$$

Очевидно, что выполняется тождество $I_2 + \Pi_2 = C_2$.

Поделив (25) на (26), получаем рентабельность во втором подразделении:

² Термин «рентабельность» по смыслу близок к термину «норма прибыли», отношению прибыли к авансированному капиталу.

$$P_2 = \frac{-w(1-a_1)l_2^2 + (1-a_1-a_2wl_1) \cdot l_2}{w(1-a_1)l_2^2 + a_2wl_1 \cdot l_2 + a_2l_1} \quad (27)$$

Подразделение – III (производство предметов роскоши).

$$П_3 = l_3 \cdot \frac{1-a_1-w(l_2(1-a_1)+a_2l_1)}{1-a_1} \quad (28)$$

$$И_3 = \frac{wl_3(l_2(1-a_1)+a_2l_1)+a_3l_1}{1-a_1} \quad (29)$$

Очевидно, что выполняется тождество $И_3 + П_3 = Ц_3$.

Поделив (28) на (29), получаем рентабельность в третьем подразделении:

$$P_3 = \frac{l_3 \cdot \{1-a_1-w[l_2(1-a_1)+a_2l_1]\}}{wl_3[l_2(1-a_1)+a_2l_1]+a_3l_1} \quad (30)$$

Используя полученные формулы (22)-(30), рассмотрим, как влияет технический прогресс на цены, прибыли, издержки и рентабельность производства в разных подразделениях.

III. ВЛИЯНИЕ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА НА ДИНАМИКУ ЦЕН, ПРИБЫЛЕЙ, ИЗДЕЖЕК И РЕНТАБЕЛЬНОСТИ ПРОИЗВОДСТВА В РАЗНЫХ ПОДРАЗДЕЛЕНИЯХ.

Рассмотрим два вида технического прогресса:

А. прогресс, основанный на экономии СРЕДСТВ ПРОИЗВОДСТВА, понижающий долю средств производства в производстве единицы продукта (экономия на энергии, сырье, материалах),

В. прогресс, основанный на экономии ТРУДА, понижающий затраты прямого труда на производство единицы продукта.

Норму реальной оплаты труда w будем считать постоянной.

А. ПРОГРЕСС, ОСНОВАННЫЙ НА ЭКОНОМИИ СРЕДСТВ ПРОИЗВОДСТВА.

Математически, этот вид прогресса выражается в снижении коэффициентов $a_1; a_2; a_3$.

ВЛИЯНИЕ НА ЦЕНЫ.

1. *Подразделение-I (Средства производства).*

Если a_1 уменьшается ($a_1 \searrow$), то цена снижается: $Ц_1 \searrow$

2. *Подразделение-II (Предметы потребления).*

Если a_2 уменьшается ($a_2 \searrow$), то цена снижается: $Ц_2 \searrow$

3. *Подразделение-III (Предметы роскоши).*

Если a_3 уменьшается ($a_3 \searrow$), то цена снижается: $Ц_3 \searrow$

Отметим, что прогресс в первом подразделении сказывается на ценах всех трёх подразделений, понижая их: если $a_1 \searrow$, то снижается цена во всех трёх подразделениях (это следует из формул (8)-(10)).

ВЛИЯНИЕ НА ИЗДЕЖКИ ПРОИЗВОДСТВА.

1. *Подразделение-I (Средства производства).*

Если a_1 уменьшается $a_1 \searrow$, то издержки снижаются: $И_1 \searrow$.

2. *Подразделение-II (Предметы потребления).*

Если a_2 уменьшается $a_2 \searrow$, то издержки снижаются: $И_2 \searrow$.

3. *Подразделение-III (Предметы роскоши).*

Если a_3 уменьшается $a_3 \searrow$, то издержки снижаются: $I_3 \searrow$.

Отметим также, что уменьшение a_1 и a_2 снижает издержки во всех трёх подразделениях. Эти выводы следуют из формул (23), (26) и (29).

ВЛИЯНИЕ НА ПРИБЫЛЬ.

1. *Подразделение-I (Средства производства).*

Если a_1 уменьшается $a_1 \searrow$, то прибыль растёт: $\Pi_1 \nearrow$.

2. *Подразделение-II (Предметы потребления).*

Если a_2 уменьшается $a_2 \searrow$, то прибыль растёт: $\Pi_2 \nearrow$.

3. *Подразделение-III (Предметы роскоши).*

Если a_3 уменьшается $a_3 \searrow$, то прибыль не меняется: $\Pi_3 = Const$.

Учитывая влияние на издержки и прибыль, получаем, что рентабельность во всех трёх подразделениях будет увеличиваться.

ВЛИЯНИЕ НА РЕНТАБЕЛЬНОСТЬ.

1. *Подразделение-I (Средства производства).*

Если a_1 уменьшается $a_1 \searrow$, то рентабельность растёт: $P_1 \nearrow$.

2. *Подразделение-II (Предметы потребления).*

Если a_2 уменьшается $a_2 \searrow$, то рентабельность растёт: $P_2 \nearrow$.

3. *Подразделение-III (Предметы роскоши).*

Если a_3 уменьшается $a_3 \searrow$, то рентабельность растёт: $P_3 \nearrow$.

ВЫВОД: Рентабельности производства всех трёх подразделений растут при прогрессе, состоящем в экономии средств производства.

В. ПРОГРЕСС, ОСНОВАННЫЙ НА ЭКОНОМИИ ЖИВОГО ТРУДА.

Рассмотрим теперь прогресс, состоящий в экономии труда. Такая экономия означает повышение производительности труда. Производительность труда можно определять как отношение выпуска продукции в подразделении в расчёте на единицу живого труда. Поскольку на производство единицы продукта требуется живой труд l_k ($k = 1; 2; 3$) единиц труда (часов, например), то единица живого труда в подразделении k производит $\frac{1}{l_k}$ единиц продукта. Это и есть показатель производительности труда в нашей модели. Рост производительности труда означает понижение прямых затрат живого труда l_k ($k = 1; 2; 3$) на производство единицы продукции.

ВЛИЯНИЕ НА ЦЕНЫ.

1. Средства производства.

Если l_1 уменьшается $l_1 \searrow$, то цена снижается: $C_1 \searrow$

2. Предметы потребления.

Если l_2 уменьшается $l_2 \searrow$, то цена снижается: $C_2 \searrow$

3. Предметы роскоши.

Если l_3 уменьшается $l_3 \searrow$, то цена снижается: $C_3 \searrow$

Отметим, что на цены второго и третьего подразделений влияет рост производительности труда первого подразделения. Из формул (8)-(10) следует, что рост производительности труда в любом подразделении ведёт к снижению цены в нём, но, при этом, рост производительности труда во втором и третьем подразделениях снижает цену продукции только этого подразделения, а рост производительности труда первого подразделения снижает цены продукции всех трёх подразделений.

ВЛИЯНИЕ НА ИЗДЕРЖКИ ПРОИЗВОДСТВА.

1. Подразделение-I (Средства производства).

Если l_1 уменьшается $l_1 \searrow$, то издержки снижаются: $I_1 \searrow$.

2. Подразделение-II (Предметы потребления).

Если l_2 уменьшается $l_2 \searrow$, то издержки снижаются: $I_2 \searrow$.

3. Подразделение-III (Предметы роскоши).

Если l_3 уменьшается $l_3 \searrow$, то издержки снижаются: $I_3 \searrow$.

Это следует из формул (23), (26) и (29).

ВЛИЯНИЕ НА ПРИБЫЛЬ.

Рост производительности труда в первом и втором подразделениях может оказывать двойное влияние на прибыль, увеличивая или уменьшая её. Функции $\Pi_1(l_1)$ и $\Pi_2(l_2)$ являются квадратичными функциями с отрицательным коэффициентом при старшем члене. Графиками их будут параболы с ветвями, направленными вниз.

Точка максимума функции $\Pi_1(l_1)$:

$$l_1^* = \frac{(1 - wl_2) \cdot (1 - a_1)}{2wa_2} \quad (31)$$

Точка максимума функции $\Pi_2(l_2)$:

$$l_2^* = \frac{1}{2w} \cdot \left(1 - \frac{a_2 w l_1}{1 - a_1} \right) \quad (32)$$

При условиях $l_1^* < 0$ и $l_2^* < 0$ прибыли становятся отрицательными. Рассматривая равновесную ситуацию с положительными прибылями, мы должны потребовать выполнения условий $l_1^* > 0$ и $l_2^* > 0$.

Таким образом, внутри первого и второго подразделений **возможны два варианта влияния роста производительности труда на прибыль.**

Вариант-1. При $l_1 > l_1^*$ функция $\Pi_1(l_1)$ убывает. При $l_2 > l_2^*$ функция $\Pi_2(l_2)$ убывает. В этих областях изменения переменной l_1 для функции $\Pi_1(l_1)$ или переменной l_2 для функции $\Pi_2(l_2)$ рост производительности труда (уменьшение l_1 или l_2) будет давать рост прибыли.

Вариант-2. В областях $0 < l_1 < l_1^*$ для функции $\Pi_1(l_1)$ и $0 < l_2 < l_2^*$ для функции $\Pi_2(l_2)$ рост производительности труда будет приводить к уменьшению прибыли.

Осталось рассмотреть влияние роста производительности труда на прибыль третьего подразделения. Из формулы (28) следует, что рост производительности труда в этом подразделении (уменьшение l_3) ведёт к уменьшению прибыли.

ВЛИЯНИЕ НА РЕНТАБЕЛЬНОСТЬ.

(1) В первом подразделении, как следует из формулы (24), рост производительности труда (уменьшение l_1) ВСЕГДА приводит к увеличению рентабельности.

(2) Во втором подразделении, чтобы выявить влияние производительности труда во втором подразделении на рентабельность, надо взять частную производную от рентабельности по параметру живого труда данного подразделения. Получаем следующее выражение:

$$\frac{\partial P_2}{\partial l_2} = \frac{(1 - a_1) a_2 l_1 - w [a_2 l_1 + l_2 (1 - a_1)]^2}{\{a_2 l_1 + w l_2 [a_2 l_1 + l_2 (1 - a_1)]\}^2} \quad (33)$$

Если частная производная отрицательна, то рост производительности труда даст увеличение рентабельности. После несложных преобразований, учитывая формулу (4), получаем условие, при котором числитель дроби в формуле (33) меньше нуля:

$$w L_2 > \frac{L_2 - l_2}{L_2} \Rightarrow w L_2^2 - L_2 + l_2 > 0 \quad (34)$$

При этом условии рост производительности труда (уменьшение l_2) ведёт к росту рентабельности производства второго подразделения. Условие (34) выполняется, только если выполнено неравенство, при котором дискриминант квадратного уравнения (34) больше нуля:

$$w l_2 < \frac{1}{4} \quad (35)$$

При этом условии, получаем следующее решение неравенства (34):

$$L_2 \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{1 - 4w l_2}}{2w} \right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4w l_2}}{2w}; \infty \right) \quad (36)$$

Для удобства анализа полученных выражений введём обозначения:

$$x = wl_2; \quad y \equiv \frac{l_2}{L_2} \quad (37)$$

Параметр y определяет долю живого труда, выполненного внутри второго подразделения, в трудовой стоимости (овеществлённом труде) продукции. Параметр x определяет долю продукции второго подразделения, которая потребляется рабочими этого подразделения.

Учитывая формулу (4), выражение (36) можно переписать в следующем виде:

$$y \equiv \frac{l_2}{L_2} \in \left(0; \frac{2x}{1+\sqrt{1-4x}} \right) \cup \left(\frac{2x}{1-\sqrt{1-4x}}; \infty \right); \quad x \leq \frac{1}{4} \quad (38)$$

Учитывая определение (12) и формулу (15) для нормы прибавочной стоимости, получим следующее выражение для параметра y :

$$y = x \cdot (1 + m) \quad (39)$$

Подставив в (38), получаем области возможных значений нормы прибавочной стоимости, при которых рост производительности труда второго подразделения приводит к увеличению рентабельности в нём:

$$m \in \left(0; \frac{1-\sqrt{1-4x}}{1+\sqrt{1-4x}} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{1-\sqrt{1-4x}}; \infty \right) \quad (40)$$

Обозначим функции, стоящие в неравенствах формулы (38):

$$y_{\min} = \frac{2x}{1+\sqrt{1-4x}}; \quad y_{\max} = \frac{2x}{1-\sqrt{1-4x}} \quad (41)$$

Обозначим функции, стоящие в неравенствах формулы (40):

$$m(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{1+\sqrt{1-4x}}; \quad M(x) = \frac{1}{m(x)} = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{1-\sqrt{1-4x}} \quad (42).$$

На **Графиках 1 - 3** показано поведение этих функций.

Функции $\left(\frac{l_2}{L_2} \right)_{\min}$ и $\left(\frac{l_2}{L_2} \right)_{\max}$ определяют границы возможных изменений отношения $\frac{l_2}{L_2}$,

при котором рост производительности труда приводит к росту рентабельности во втором подразделении (выше красной линии или ниже синей линии на **Графиках 1 и 2**).

При каждом значении $y = \frac{l_2}{L_2}$ решением уравнений $\frac{2x}{1+\sqrt{1-4x}} = y$ и $\frac{2x}{1-\sqrt{1-4x}} = y$

будет значение x_0 :

$$x_0 = y(1 - y) \quad (43)$$

Рассмотрим два примера: 1) $y = \frac{l_2}{L_2} = 0.2$ и 2) $y = \frac{l_2}{L_2} = 0.6$. В первом примере

рентабельность будет расти при увеличении производительности труда, если параметр x больше 0.16 (**График 1**). Во втором случае значение x должно быть больше 0.24 для того, чтобы рост производительности труда приводил к росту рентабельности (**График 1**).

График 1. Функции $y_{\min}(x)$ и $y_{\max}(x)$.

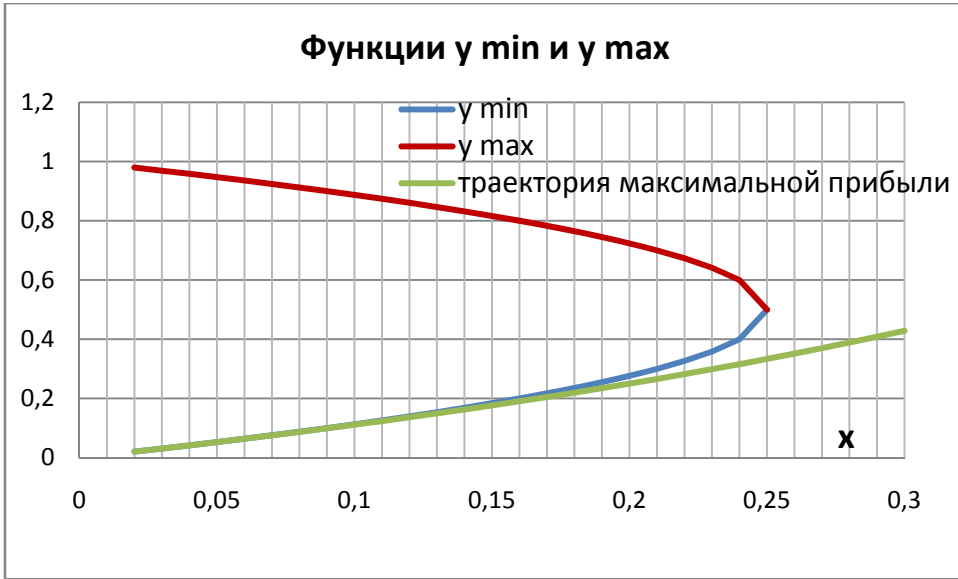


График 2. Функции $t(x)$ и $M(x)$.

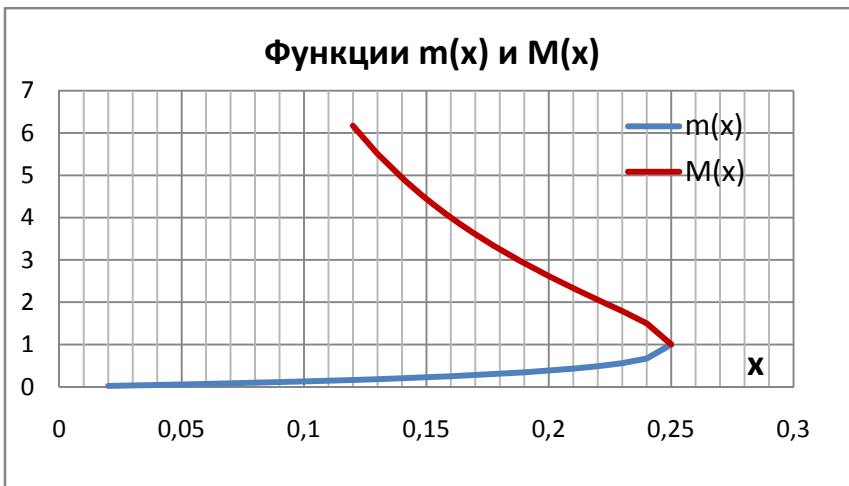
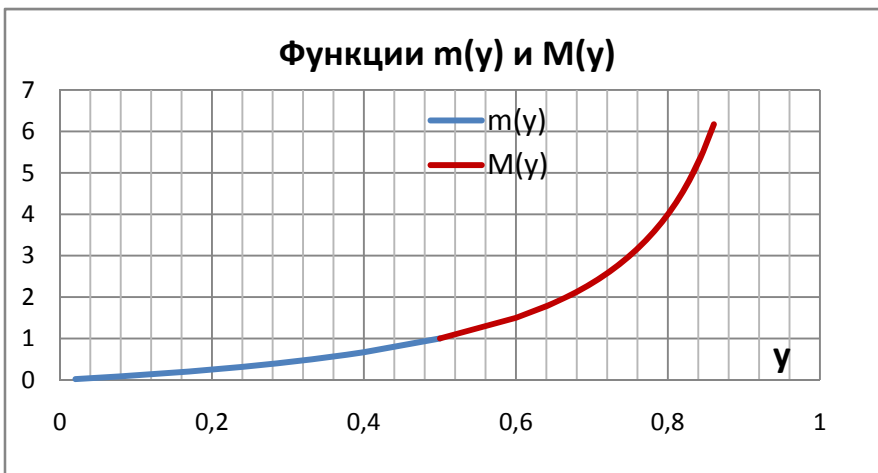


График 3. Функции $t(y)$ и $M(y)$.



Область, в которой рост производительности труда во втором подразделении понижает рентабельность в нём, расположена между красной и синей кривыми на **Графиках 1 и 2**.

Предельные значения нормы прибавочной стоимости m находятся из равенства (39), если в него подставить решение для предельного значения $x_0 = y(1-y)$. Отсюда получим для предельных значений m_0 формулу:

$$m_0 = \frac{y}{1-y} \quad (44)$$

Для наших двух примеров при $y = \frac{l_2}{L_2} = 0.2$ получим $m_0 = 0.25$, при $y = \frac{l_2}{L_2} = 0.6$

получим $m_0 = 1.5$ (смотри **График 3**).

Условие (40) можно записать в виде неравенства:

$$x > \frac{m}{(1+m)^2} \quad (45)$$

Условие (40) – это решение неравенства (45). Учитывая формулу (39), можно условие (45) записать ещё так:

$$m < \frac{y}{1-y}; \quad y > \frac{m}{1+m} \quad (46)$$

$$x > y(1-y) \quad (47)$$

Формула (38) – это решение неравенства (47).

Формулы (45)-(47) – это математически эквивалентные записи условия, при котором рост производительности труда во втором подразделении даёт увеличение рентабельности в этом подразделении.

(3) В третьем подразделении, взяв частную производную от рентабельности (формула (30)) по l_3 , получим:

$$\frac{\partial P_3}{\partial l_3} = \frac{a_3 l_1 \cdot \{1 - a_1 - w[a_2 l_1 + l_2(1 - a_1)]\}}{\{a_3 l_1 + w l_3 [a_2 l_1 + l_2(1 - a_1)]\}^2} \quad (48)$$

Производная меньше нуля, если $wL_2 > 1$, что невозможно, в силу формулы (15). Таким образом, в третьем подразделении выполняется неравенство $\frac{\partial P_3}{\partial l_3} > 0$ и, следовательно, рост производительности труда в этом подразделении (уменьшение l_3) приводит к падению рентабельности в нём.

IV. КАЧЕСТВЕННЫЕ ВЫВОДЫ.

Ниже приведены **Таблицы 1 и 2**, в которых собраны рассмотренные выше закономерности влияния технического прогресса на динамику цен, прибылей, издержек и рентабельностей в разных подразделениях³.

Основная тенденция состоит в следующем. Технический прогресс снижает цены и издержки производства и, чаще всего, приводит к увеличению рентабельности производства в первом и втором подразделениях.

В случае технического прогресса-А (экономия на средствах производства) динамика $I \searrow$; $C \searrow$; $P \nearrow$ характерна для первого и второго подразделений.

В случае технического прогресса-В (экономия живого труда) в первом и втором подразделениях динамика $I \searrow$; $C \searrow$; $P \nearrow$ будет иметь место, если выполнены условия:

$$l_1 > l_1^*; \quad l_2 > l_2^*; \quad m < \frac{y}{1-y} \quad (49)$$

Преобразуем выражения для l_1^* и l_2^* . Из формул (12) и (15) находим:

$$l_1 = l_2 \cdot \frac{1-a_1}{xa_2} \cdot \left(\frac{1}{1+m} - x \right) \quad (50)$$

Подставим в (50) формулу (32). После несложных преобразований, неравенство $l_2 > l_2^*$ приводится к следующему неравенству:

$$x > \frac{m}{1+m} \quad (51)$$

Таким образом, во втором подразделении рост производительности труда приводит к росту прибыли, если выполняется неравенство (51) и к росту рентабельности, если выполняется

неравенство (45). Для значений параметра x , принадлежащих интервалу $x \in \left(\frac{m}{(1+m)^2}; \frac{m}{1+m} \right)$,

рост рентабельности происходит при понижающейся прибыли.

Неравенство $l_1 > l_1^*$, учитывая формулу (50), приводится к виду:

$$x < \frac{1-m}{1+m} \quad (52)$$

При условии (52) рост производительности труда в первом подразделении приводит к росту прибыли в нём. Оба условия (51)-(52) могут быть выполнены одновременно, только если норма прибавочной стоимости удовлетворяет неравенству:

$$\frac{m}{1+m} < \frac{1-m}{1+m}; \quad m < \frac{1}{2} \quad (53)$$

Учитывая формулу (39), условия (52)-(53) можно переписать в виде:

³ Полученные здесь результаты не вполне соответствуют утверждению об обязательном падении рентабельности при росте производительности труда, которое приводит в своей статье Валерий Васильевич Калюжный (Калюжный, 2016): «Маркс утверждал о снижении цены и рентабельности (норм прибыли по издержкам производства) в зависимости от повышения производительной силы труда, а не об их росте» (стр. 10). Как ясно из приведённых выше формул и **Таблиц 1 и 2**, истинные закономерности гораздо сложнее.

Условие, при котором рост производительности труда в первом подразделении приводит к росту прибыли в нём:

$$y < 1 - t \text{ или } t < 1 - y; \quad (54)$$

Условие, при котором рост производительности труда во втором подразделении приводит к росту прибыли в нём:

$$y > t$$

При нормах прибавочной стоимости, лежащих в интервале $\left(y; \frac{y}{1-y}\right)$, рост рентабельности второго подразделения происходит при снижающейся прибыли.

График 1 указывает на существование двух областей:

“ОБЛАСТЬ ПРОГРЕССА” (выше и правее красной + ниже и правее синей ветвей Графика 1). В этой области рост производительности труда ведёт к росту рентабельности производства второго подразделения и поэтому внутри этой области капиталистам (менеджерам) выгодно осуществлять технические усовершенствования, дающие экономию живого труда и рост производительности труда.

“ОБЛАСТЬ РЕГРЕССА” (между красной и синей ветвями Графика 1). В этой области технические усовершенствования, дающие рост производительности труда, становятся невыгодными капиталистам (менеджерам), так как приводят к снижению рентабельности.

Таблица 1. Влияние технического прогресса-А (экономию на средствах производства) на динамику цен, издержек производства, прибыли и рентабельности в разных подразделениях.

Подразделение	Цена	Издержки	Прибыль	Рентабельность
I. $a_1 \searrow$	$C_1 \searrow$	$I_1 \searrow$	$\Pi_1 \nearrow$	$P_1 \nearrow$
II. $a_2 \searrow$	$C_2 \searrow$	$I_2 \searrow$	$\Pi_2 \nearrow$	$P_2 \nearrow$
III. $a_3 \searrow$	$C_3 \searrow$	$I_3 \searrow$	$\Pi_3 = Const$	$P_3 \nearrow$

Таблица 2. Влияние технического прогресса-В (экономию на живом труде) на динамику цен, издержек производства, прибыли и рентабельности в разных подразделениях.

Подразделение	Цена	Издержки	Прибыль	Рентабельность
I. $l_1 \searrow$	$C_1 \searrow$	$I_1 \searrow$	Если $t < 1 - y$; $\Pi_1 \nearrow$ Если $t > 1 - y$; $\Pi_1 \searrow$	$P_1 \nearrow$
II. $l_2 \searrow$	$C_2 \searrow$	$I_2 \searrow$	Если $t < y$; $\Pi_2 \nearrow$ Если $t > y$; $\Pi_2 \searrow$	1) $t < \frac{y}{1-y}$; $P_2 \nearrow$ 2) $t > \frac{y}{1-y}$; $P_2 \searrow$
III. $l_3 \searrow$	$C_3 \searrow$	$I_3 \searrow$	$\Pi_3 \searrow$	$P_3 \searrow$

V. ПРИБЫЛЬ ВТОРОГО ПОДРАЗДЕЛЕНИЯ КАК ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Рассмотрим более детально полученную выше формулу для прибыли в единице продукции второго подразделения:

$$\Pi_2 = -wl_2^2 + \left(1 - \frac{a_2wl_1}{1-a_1}\right) \cdot l_2 \quad (25)$$

Будем считать постоянными параметры a_2 , a_1 , l_1 . Тогда мы имеем функцию двух переменных $\Pi_2(w; l_2)$. На **Графике 4** показана соответствующая (25) поверхность.

При построении приведённых в этой главе графиков были взяты значения:

$$a_1 = 0.5; a_2 = 0.3; l_1 = 0.3.$$

График 4 показывает, что функция $\Pi_2(w; l_2)$ растёт с уменьшением w (при фиксированном значении l_2).

Функция $\Pi_2(w; l_2)$ является параболой по переменной l_2 (при каждом значении w), вершина которой определяет точку максимума l_2^* :

$$l_2^* = \frac{1}{2w} \cdot \left(1 - \frac{a_2wl_1}{1-a_1}\right) \quad wl_2^* \equiv x^* = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{w}{w_0}\right) \quad (33)$$

Максимально возможная прибыль $\Pi_{2\max}(w)$ (при каждом значении w) зависит от ставки реальной оплаты труда w . В точке максимума (33) формула (25) даст нам следующее выражение для максимальной прибыли.

$$\Pi_{2\max}(w) = \frac{1}{4w} + \left(\frac{a_2l_1}{2(1-a_1)}\right)^2 \cdot w - \frac{a_2l_1}{2(1-a_1)} \quad (55)$$

График 5 показывает, что функция $\Pi_{2\max}(w)$ имеет точку минимума w_0 , в которой прибыль $\Pi_{2\max}$ обращается в ноль.

$$w_0 \equiv \frac{1-a_1}{a_2l_1} \quad (56)$$

Точке минимума этой функции w_0 соответствует значение $l_2^* = 0$. При $w > w_0$ точка максимума l_2^* меньше нуля, а прибыль (25), при любом положительном l_2 , отрицательная. Таким образом, экономике с положительными прибылями соответствует область: $w < w_0 \equiv \frac{1-a_1}{a_2l_1}$.

Функция $\Pi_{2\max}(w)$ растёт с уменьшением w внутри этой области $w < w_0$.

Точки максимума (33) задают кривую в плоскости (x, y) . Перепишем формулу (33) в виде:

$$wl_2^* + wL_2^* = 1 \quad L_2^* = l_2^* + \frac{a_2l_1}{1-a_1} = l_2^* + \frac{1}{w_0} \quad (57)$$

Символ «звёздочка» означает, что прибыли рассчитаны в точке максимальной прибыли, которая может быть получена за счёт изменения величины живого труда при заданных значениях всех остальных параметров. Учитывая, что $wL_2^* = \frac{wl_2^*}{y^*} = \frac{x^*}{y^*}$, получаем для точек максимума прибыли второго подразделения кривую в плоскости (x, y) , задаваемую уравнением:

$$y^* = \frac{x^*}{1-x^*} \quad (58)$$

Эта кривая (назовём её **ТРАЕКТОРИЕЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ПРИБЫЛИ**) лежит в “области прогресса” и пересекается с нижней ветвью $y_{\min}(x)$ в точке $x=0$. Выразим прибыли Π_2 и $\Pi_{2\max}$ через разные переменные $x; y; m$. Для этого нам понадобятся вспомогательные формулы.

График 4. Прибыль второго подразделения как функция $\Pi_2(w; l_2)$ при $\Pi_2 > 0$.

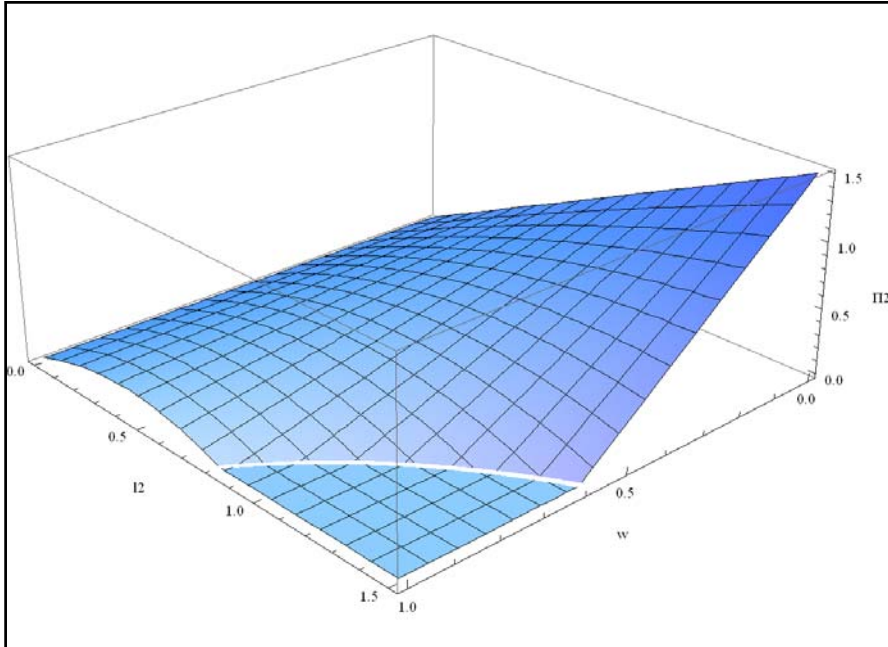
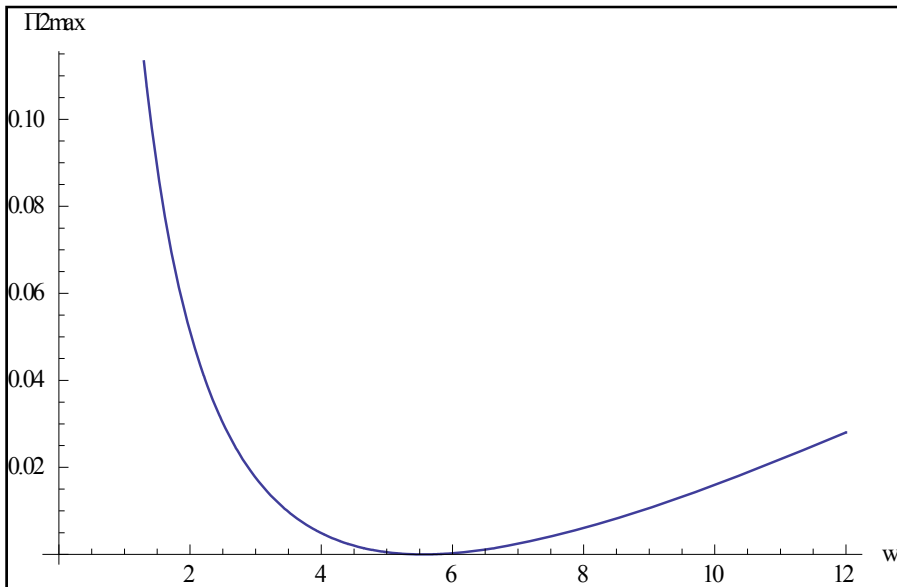


График 5. Максимально-возможная прибыль $\Pi_{2\max}(w)$.



Формулу (4) умножим на w и учтём формулы (12), (15) и (39). Получим следующую цепочку равенств:

$$wL_2 = \frac{1}{1+m} = \frac{x}{y} = wl_2 + \frac{wa_2l_1}{1-a_1} = x + w \cdot \frac{a_2l_1}{1-a_1} \quad (59)$$

Из (59) выражаем w , учитывая (56):

$$w = \frac{x(1-y)}{y} \cdot \frac{1-a_1}{a_2l_1} = \frac{x(1-y)}{y} \cdot w_0 \quad (60)$$

Подставив (60) в формулу (25), находим зависимость $\Pi_2(x; y)$. Сначала запишем:

$$\Pi_2 = -wl_2^2 + \left(1 - \frac{a_2wl_1}{1-a_1}\right) \cdot l_2 = -\frac{x^2}{w} + \left(1 - \frac{w}{w_0}\right) \cdot \frac{x}{w}$$

Подставив сюда формулу (60), находим:

$$\Pi_2(x; y) = \frac{y-x}{w_0(1-y)} \quad (61)$$

Выражение для $\Pi_{2\max}$ получим, подставив (58) в (61).

$$\Pi_{2\max}(x^*) = \frac{x^{*2}}{w_0(1-2x^*)} \quad (62)$$

Переменная x в формуле (62) определяется из равенства (33), которое можно переписать в виде: $wl_2^* = x = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{w}{w_0}\right)$. Параметр w_0 зависит от производительности труда первого подразделения (формула (56)).

Формулу (39) запишем в виде:

$$x = \frac{y}{1+m} \quad (39)$$

Подставив в (61), получаем прибыль как функцию y и m :

$$\Pi_2(m; y) = \frac{m}{1+m} \cdot \frac{y}{(1-y)} \cdot \frac{1}{w_0} \quad (63)$$

Учитывая (58) и (62), находим для максимальной прибыли:

$$\Pi_{2\max}(m) = \frac{m^{*2}}{w_0(1-m^{*2})}, \text{ где} \quad (64)$$

$$m^* = \frac{y^*}{x^*} - 1 \quad (65)$$

В частности, для точек кривой максимальной прибыли (58), из формул (58) и (62) следуют равенства:

$$y^* = m^* \quad (66)$$

$$x^* = \frac{m^*}{1+m^*}; \quad m^* = \frac{x^*}{1-x^*} \quad (67)$$

$$\Pi_{2\max}(y^*) = \frac{y^{*2}}{w_0(1-y^{*2})} \quad (68)$$

Отметим нетривиальную особенность динамики экономической системы, оказавшейся на траектории максимальной прибыли. Внедрение новшеств, увеличивающих производительность труда во втором подразделении (уменьшающих параметр l_2), предпринимаемое с целью достижения максимальной прибыли при фиксированной ставке реальной оплаты труда w , приводит экономическую систему на траекторию максимальной прибыли (58) в плоскости $(x; y)$. На **Графике 6** нанесена траектория максимальной прибыли и кривые (60), соответствующие разным значениям параметра w (взяты значения $w=2; 3; 4$). Процесс краткосрочной максимизации прибыли за счёт изменения производительности труда во втором подразделении сдвигает экономическую систему вдоль кривой $w = Const$ до точки пересечения с траекторией

максимальной прибыли. При этом процесс краткосрочной максимизации прибыли может происходить как за счёт увеличения производительности труда (если $l_2 > l_2^*$), так и за счёт уменьшения производительности труда (если $l_2 < l_2^*$). На **Графике 6** максимизация прибыли сопровождается ростом производительности труда при уменьшении параметра $x = wl_2$, то есть при движении системы вдоль кривой $w = Const$ в области, расположенной справа от траектории максимальной прибыли.

Для точек траектории максимальной прибыли получим из формулы (60):

$$w = (1 - 2x^*)w_0 \quad (69)$$

$$x^* = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{w}{w_0} \right) \quad (70)$$

$$w = \frac{1}{\frac{1}{w_0} + 2l_2^*} \quad (71)$$

Рост производительности труда во втором подразделении (уменьшение параметра l_2 при фиксированном w_0) в экономике, **находящейся на траектории максимальной прибыли**, ведёт к увеличению реальной оплаты труда w работников второго подразделения (71) и уменьшению параметра x (формула (70)), а значит и $y = \frac{x}{1-x}$. При этом уменьшается норма прибавочной стоимости m (формула (66)) и максимально возможная прибыль $\Pi_{2\max}$ (формула (67)). То есть, технический прогресс во втором подразделении, осуществляемый за счёт максимизации прибыли (при $w_0 = Const$), неизбежно ведёт к падению прибыли $\Pi_{2\max}$ в длинном периоде и смещению экономики в сторону меньших значений x и y - в направлении к области регресса (**График 1**). На **Графике 7** показаны траектория максимальной прибыли и границы области регресса в плоскости (x, y) при выбранных (смотри выше) значениях параметров. **Графики 8 и 9** показывают, как меняется максимальная прибыль и норма прибавочной стоимости при сдвиге системы вдоль траектории максимальной прибыли.

Влияние роста производительности труда в первом подразделении на прибыль в единице продукции второго подразделения (для системы, находящейся на траектории максимальной прибыли) в экономике, находящейся на траектории максимальной прибыли, будет противоположным. Уменьшение параметра l_1 (при фиксированном l_2) увеличивает параметры w_0 и w (формулы (56) и (70)), увеличивает $x = wl_2$ и $y = \frac{x}{1-x}$ и максимально возможную прибыль второго подразделения. Таким образом, рост производительности труда в первом подразделении смещает экономику второго подразделения вдоль траектории максимальной прибыли в сторону увеличения максимально возможной прибыли. Рост производительности труда в первом подразделении препятствует сдвигу экономики второго подразделения в направлении к области регресса.

Аналогичная закономерность действует и для максимально возможной прибыли первого подразделения: рост производительности труда в первом подразделении понижает максимально возможную прибыль $\Pi_{1\max}$, тогда как рост производительности труда во втором подразделении повышает максимально возможную прибыль первого подразделения. Эти закономерности проще увидеть, если написать выражения для $\Pi_{1\max}$ и $\Pi_{2\max}$ через l_1 и l_2 :

$$\Pi_{1\max}(l_1^*; l_2) = \frac{a_2 l_1^*}{2a_2 + (1-a_1) \frac{l_2}{l_1^*}} \quad (72)$$

$$\Pi_{2\max}(l_1; l_2^*) = \frac{(1-a_1) l_2^*}{a_2 \frac{l_1}{l_2^*} + 2(1-a_1)} \quad (73)$$

Формула (72) следует из (22), если в эту формулу подставить значение (31) и учесть соотношение $w = \frac{1}{\frac{2}{w_0^*} + l_2}$, (где $w_0^* \equiv \frac{1-a_1}{a_2 l_1^*}$), следующее из формулы (31). Аналогично тому, как это

было сделано для второго подразделения, для первого подразделения также можно ввести понятие **траектории максимальной прибыли**. Формулу (31) для l_1^* можно заменой переменных привести к виду функции, задающей траекторию максимально возможной прибыли $\Pi_{1\max}$ на плоскости $(x; y)$:

$$y = \frac{2x}{1+x} \quad (74)$$

Можно сделать вывод, что **технический прогресс в первом и втором подразделениях**, ведущий к росту производительности труда в них, сложным образом связан с ростом прибыли в единице продукции этих подразделений. Необходимо рассматривать два случая:

- (1) экономика не находится на траектории максимальной прибыли
- (2) экономика развивается, находясь всё время на траектории максимальной прибыли.

В первом случае, стремление максимизировать прибыль в единице продукции не всегда возможно с помощью увеличения производительности труда. Например, для второго подразделения при фиксированной норме реальной оплаты труда $w = Const$, максимизация прибыли за счёт роста производительности труда в этом подразделении возможна лишь при движении экономики вдоль части кривой $w = Const$, расположенной справа от траектории максимальной прибыли на плоскости $(x; y)$ (**График 6**).

Во втором случае рост производительности труда во втором подразделении на траектории максимальной прибыли приводит к падению прибыли в единице продукции. Принцип максимизации прибыли для этого случая (системы, находящейся на траектории максимальной прибыли) тормозит рост производительности труда. Технический прогресс в этом случае (уменьшение параметра x вдоль траектории максимальной прибыли) будет смещать экономическую систему в направлении к границе, разделяющей области прогресса и регресса (**График 7**).

Точка пересечения траекторий максимально-возможной прибыли, уравнения которых задаются формулами (58) и (74), определяет такое состояние экономики, в котором оба подразделения находятся на траектории максимально-возможной прибыли. Это состояние характеризуется значениями:

$$x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{2}; m = \frac{1}{2} \quad (75)$$

Принцип максимизации прибыли лежит в основе капиталистической экономики. Поскольку оба подразделения стремятся максимизировать прибыль, точка пересечения

траекторий максимально-возможной прибыли – это состояние, к которому стремятся капиталисты обоих подразделений, то есть аттрактор экономики, функционирующей на основе принципа максимизации прибыли. Рассмотрим рентабельности производств первого и второго подразделений в этой точке. Поскольку $wL_2 = \frac{1}{1+m} = \frac{2}{3}$, из (4) получим $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{a_2 w l_1}{1-a_1}$. Выразив

отсюда $w l_1$, подставляем в формулы рентабельности:

$$P_{1\max} = \frac{l_1 - w l_1 L_2}{\frac{a_1 l_1}{1-a_1} + w l_1 L_2} = \frac{w l_1 - w l_1 \cdot w L_2}{\frac{a_1 w l_1}{1-a_1} + w l_1 \cdot w L_2} = \frac{1 - w L_2}{\frac{a_1}{1-a_1} + w L_2} = \frac{1}{2 + \frac{3a_1}{1-a_1}} \quad (76)$$

$$P_{2\max} = \frac{l_2 - w l_2 L_2}{\frac{a_2 l_2}{1-a_1} + w l_2 L_2} = \frac{w l_2 - w l_2 \cdot w L_2}{\frac{a_2 w l_2}{1-a_1} + w l_2 \cdot w L_2} = \frac{1}{5} \quad (77)$$

Рентабельности подразделений в точке (75) одинаковы и равны ($= \frac{1}{5}$), если $a_1 = \frac{1}{2}$.

На **Графиках 10 и 11** показана зависимость прибыли второго подразделения от параметров $(x; y)$ (формула (61)), и параметров $(m; y)$ (формула (63)). Область $y > 1$ не имеет экономического смысла, поскольку параметр y - это доля живого труда в овеществлённом труде в продукции второго подразделения. Отметим закономерности. Прибыль второго подразделения в единице продукции растёт, если растёт норма прибавочной стоимости m . Это – известный результат. Но прибыль растёт также, если увеличивается параметр $y \equiv \frac{l_2}{L_2}$.

Вторую формулу (37) запишем в виде:

$$y \equiv \frac{l_2}{L_2} = \frac{l_2}{l_2 + \frac{a_2 l_1}{1-a_1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{w_0 l_2}} \quad (37)$$

Рост параметра y может происходить или в результате уменьшения трудовой стоимости продукции L_2 , например, за счёт экономии на средствах производства (уменьшения $\frac{a_2 l_1}{1-a_1}$) или за счёт увеличения живого труда, используемого в производстве продукции. Первый способ увеличения параметра y достигается, благодаря техническому прогрессу (экономии средств производства), тогда как второй способ повышения прибыли достигается переходом к трудоёмким технологиям (увеличению l_2). Последний результат на первый взгляд кажется довольно странным, но если сравнить прибыль в единице продукции в разные исторические эпохи, то окажется, что в обществе, где преобладали трудоёмкие технологии, прибыль в единице продукции была выше, чем в обществах с низкой трудоёмкостью производства.

График 6. Траектория максимальной прибыли (зелёный цвет) и кривые фиксированной нормы реальной оплаты труда w (взяты значения $w = 2; 3; 4$).

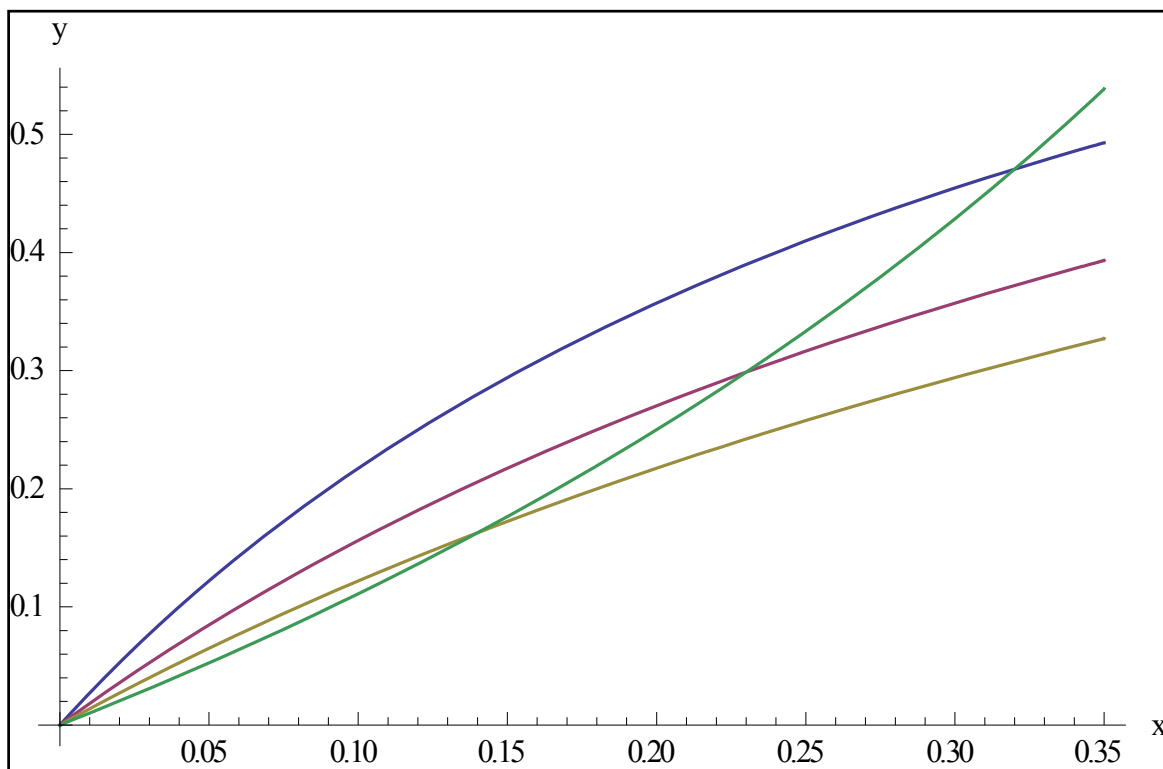


График 7. Траектории максимальной прибыли первого (зелёный) и второго (коричневый) подразделений и граница (красный и синий), разграничивающая области прогресса и регресса второго подразделения.

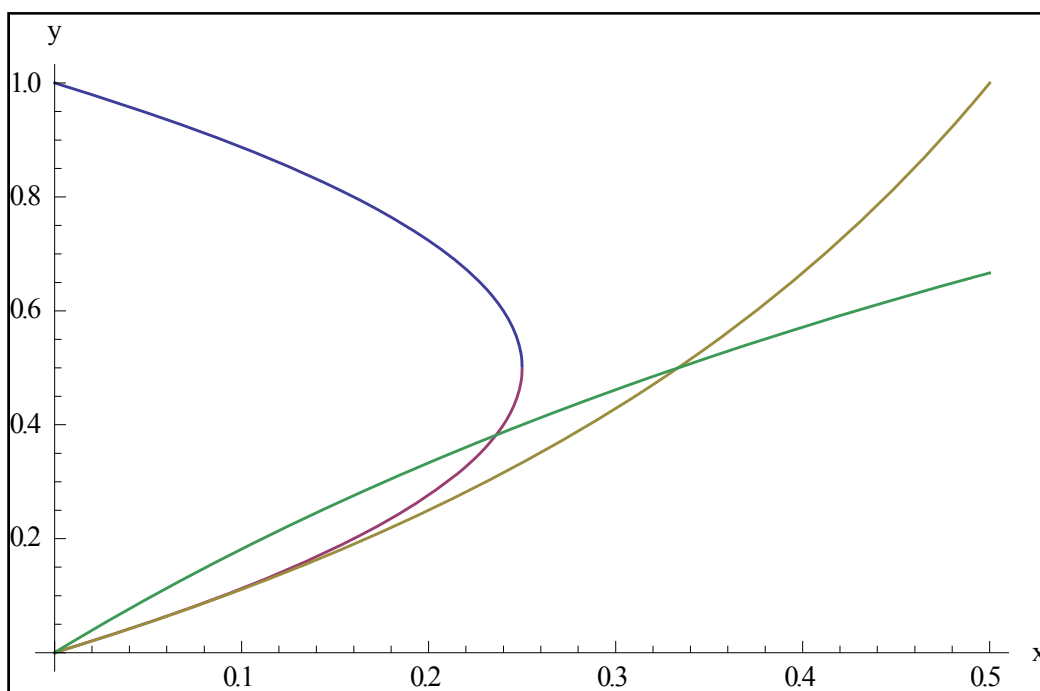


График 8. Максимально возможная прибыль $\Pi_{2\max}(x)$ (формула (67)).

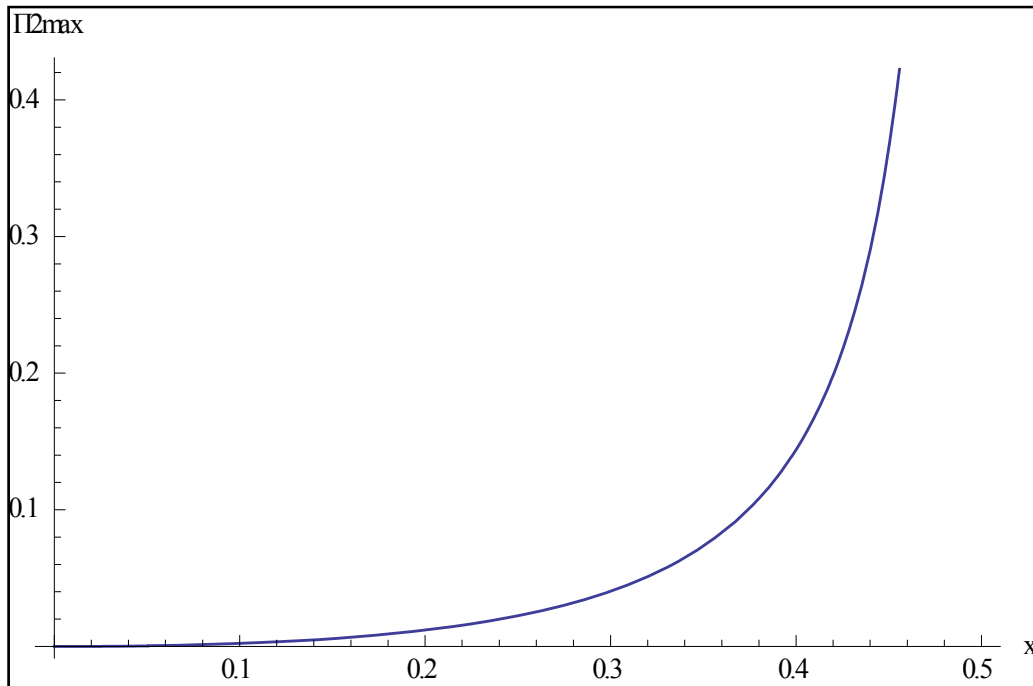


График 9. Норма прибавочной стоимости, соответствующая максимально возможной прибыли второго подразделения (формула (66)).

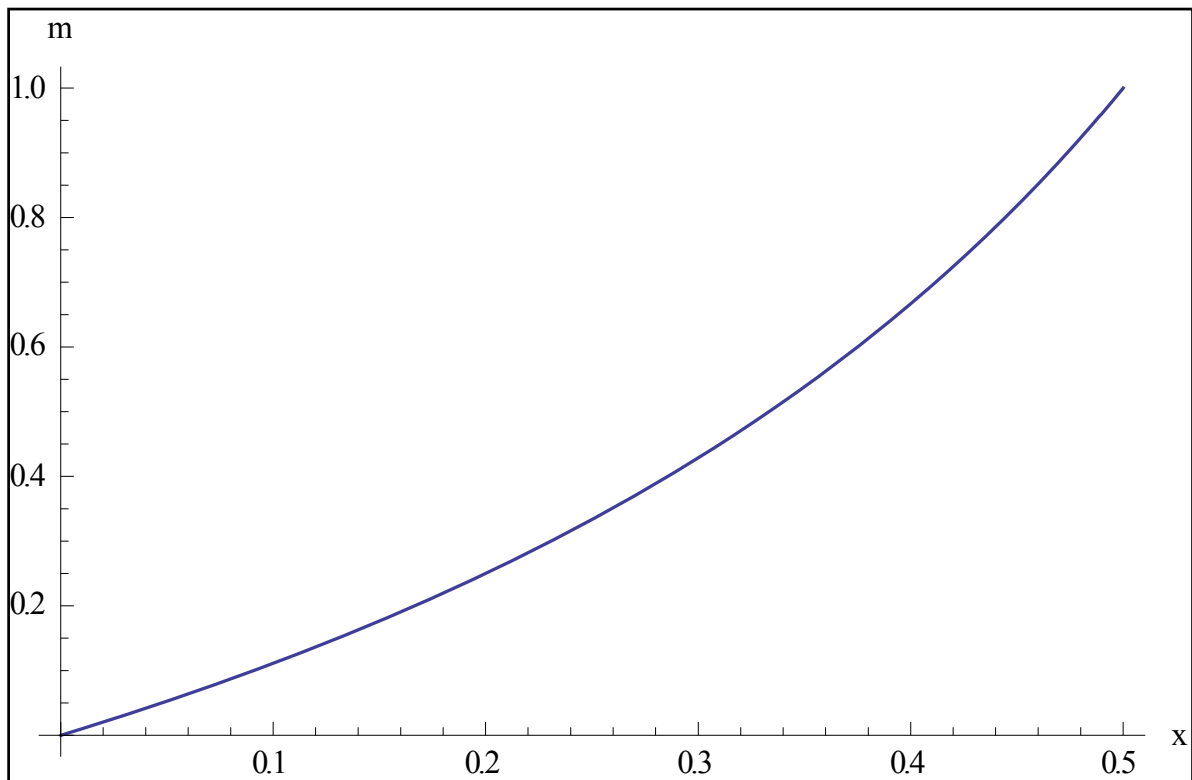


График 10. Прибыль второго подразделения как функция $\Pi_2(x; y)$ (формула (61)).

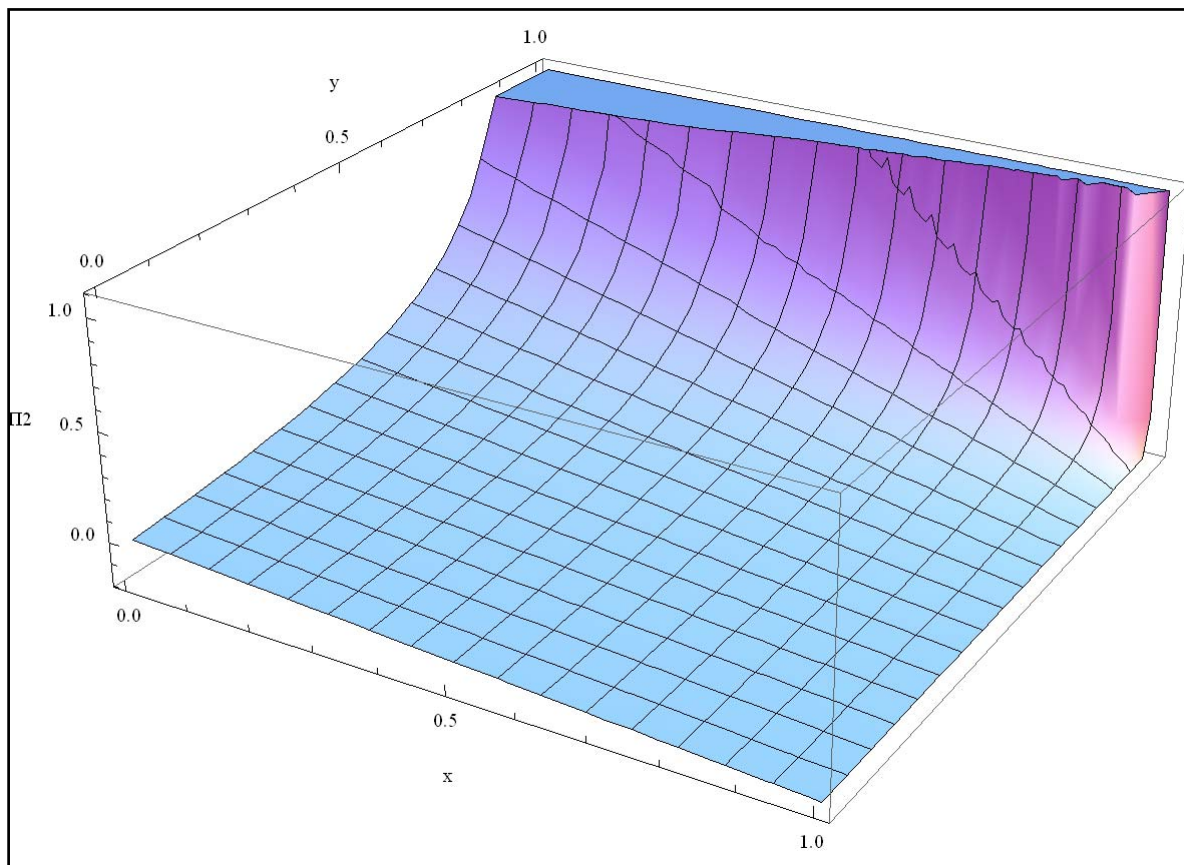
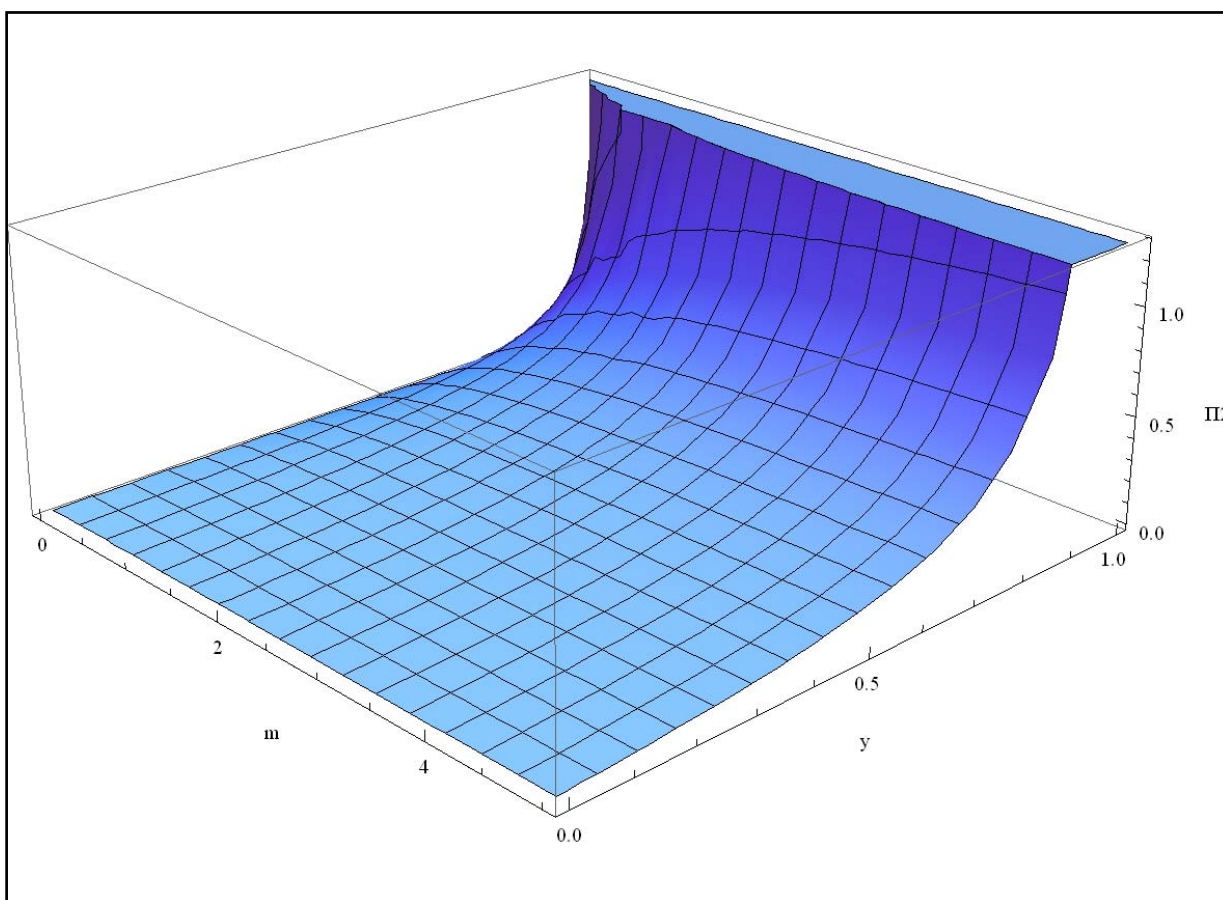


График 11. Прибыль второго подразделения как функция $\Pi_2(m; y)$ (формула (61)).



VI. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ: РЕНТАБЕЛЬНОСТИ КАК ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ l_1 и l_2 ИЛИ ПЕРЕМЕННЫХ m и y

Рассмотрим теперь общий случай рентабельностей как функций от переменных l_1 и l_2 . Построим поверхности $P_1(l_1; l_2)$, $P_2(l_1; l_2)$ и $P_3(l_1; l_2)$.

$$P_1(l_1; l_2) = \frac{(1-wl_2)(1-a_1) - wa_2l_1}{wa_2l_1 + a_1 + wl_2(1-a_1)} \quad (78)$$

$$P_2(l_1; l_2) = \frac{-w(1-a_1)l_2^2 + (1-a_1 - a_2wl_1) \cdot l_2}{w(1-a_1)l_2^2 + a_2wl_1 \cdot l_2 + a_2l_1} \quad (79)$$

$$P_3(l_1; l_2) = \frac{l_3 \cdot \{1 - a_1 - w[l_2(1-a_1) + a_2l_1]\}}{wl_3[l_2(1-a_1) + a_2l_1] + a_3l_1} \quad (80)$$

На **Графиках 12 – 14** показаны графики этих функций. Графики построены для следующих значений параметров:

$$w=1; a_1=0.5; a_2=0.3; a_3=0.2; l_3=0.5.$$

Графики демонстрируют, что повышение производительности труда в первом и втором подразделениях (уменьшение l_1 и l_2) приводит к росту рентабельности в первом и третьем подразделениях. Рост производительности в первом подразделении также повышает рентабельность во втором подразделении.

Вместо координат l_1 и l_2 можно использовать координаты m и y . Для этого можно использовать формулы (39) и (50), которые дают следующие правила преобразования к новым координатам:

$$wl_1 = \left(\frac{1-a_1}{a_2} \right) \cdot \frac{1-y}{1+m} \quad (81)$$

$$wl_2 = \frac{y}{1+m} \quad (82)$$

Подставив в (78)-(80), получаем:

$$P_1(m) = \frac{(1-a_1)m}{1+a_1m} \quad (83)$$

$$P_2(m; y) = \frac{my}{1+m(1-y)} \quad (84)$$

$$P_3(m; y) = \frac{wl_3 \cdot m}{wl_3 + \frac{a_3}{a_2} \cdot (1-y)} \quad (85)$$

На **Графиках 15 – 17** приведены графики функций (83) – (85). Отметим две особенности функций рентабельности в координатах m и y . Рентабельность первого подразделения зависит только от технического коэффициента a_1 и нормы прибавочной стоимости. Коэффициент a_1 показывает, какая часть всей продукции первого подразделения используется внутри этого подразделения. Рентабельность второго подразделения не зависит от технических коэффициентов a_1 и a_2 и определяется только нормой прибавочной стоимости и долей живого труда в стоимости продукции второго подразделения, параметром $y \equiv \frac{l_2}{L_2}$.

График 12. Рентабельность $P_1(l_1; l_2)$ при $w=1$.

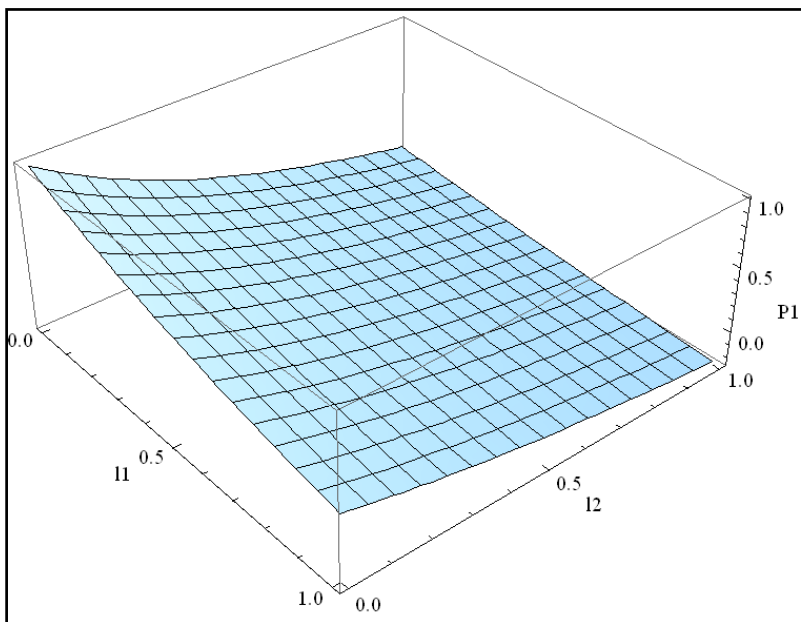


График 13. Рентабельность $P_2(l_1; l_2)$ при $w=1$.

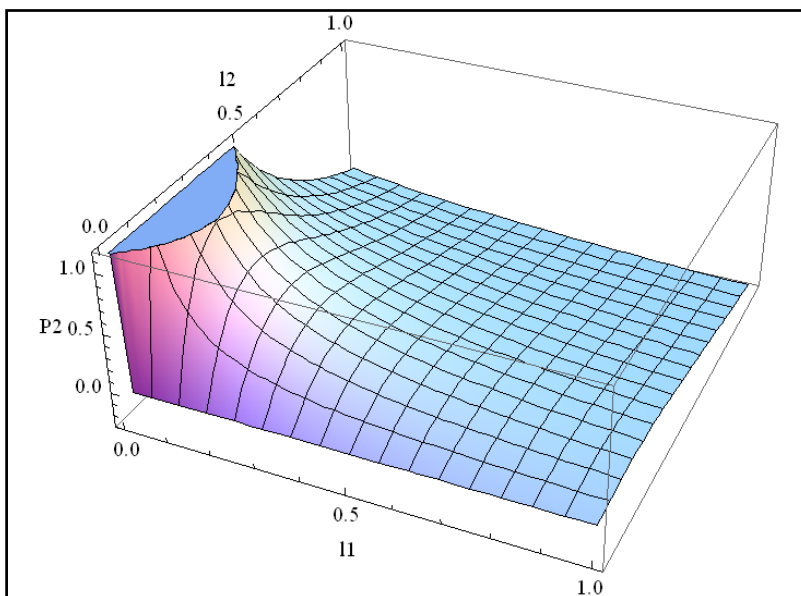


График 14. Рентабельность $P_3(l_1; l_2)$ при $w=1$.

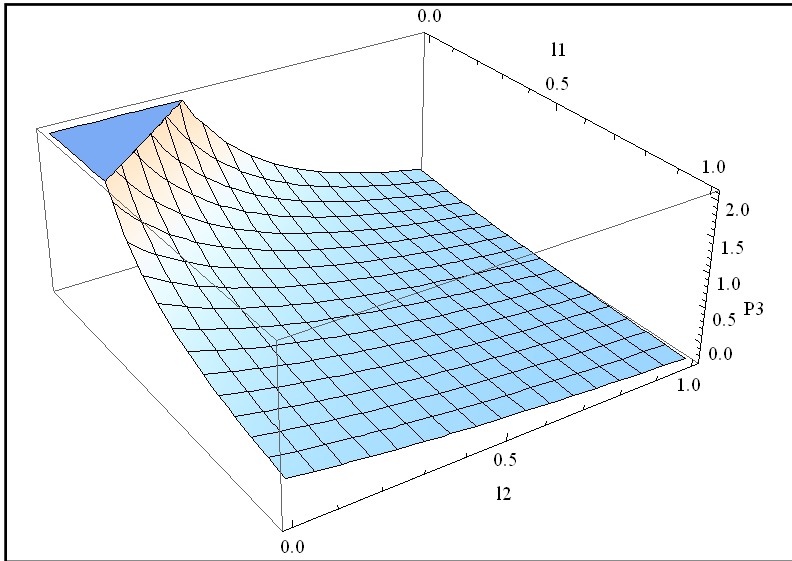


График 15. Рентабельность $P_1(m)$ при $w=1$.

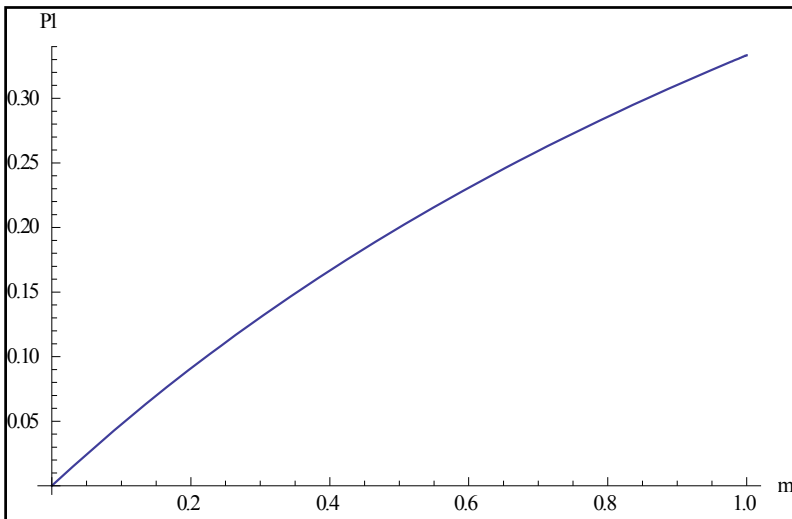


График 16. Рентабельность $P_2(m; y)$ при $w=1$.

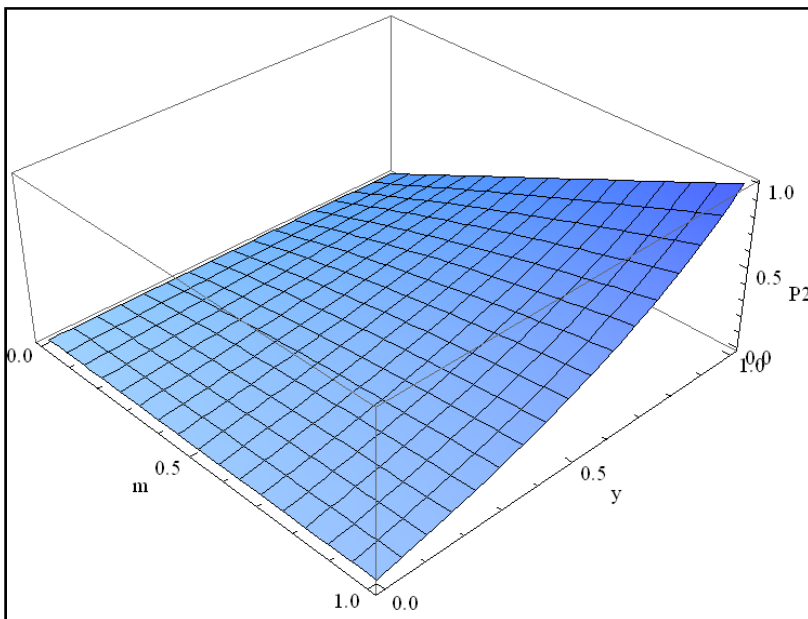
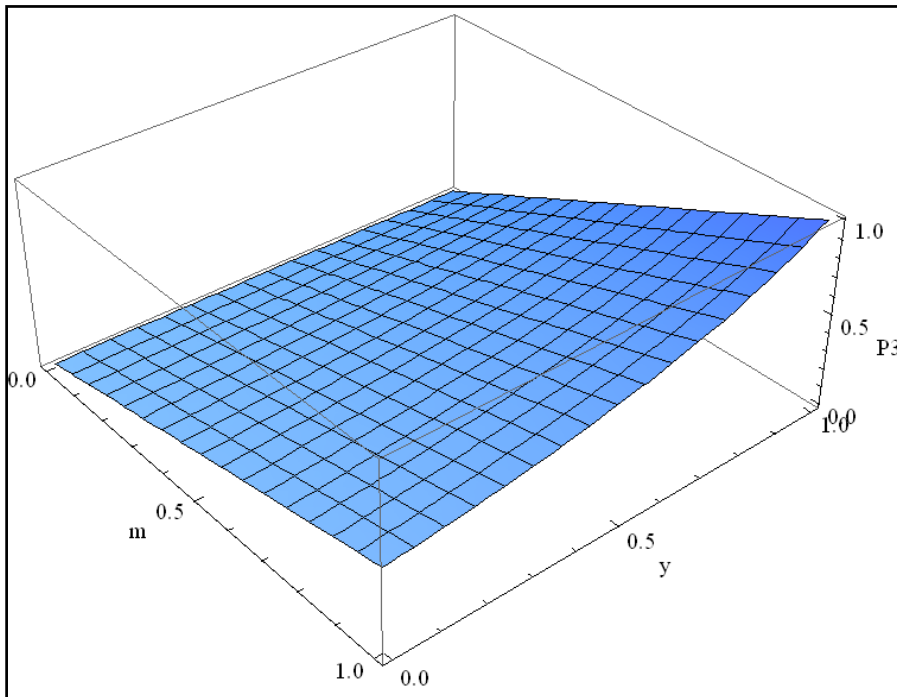


График 17. Рентабельность $P_3(m; y)$ при $w=1$.



VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Полученные выше закономерности относятся к единицам выпуска подразделений, то есть к составным товарам. Их нельзя переносить на отдельные виды товаров внутри составного товара. Закономерности прибыли – издержки – цены для отдельных видов товаров намного сложнее и их изучение требует применения матричного анализа.

В то же время полученные закономерности, вероятно, могут быть использованы на практике. В статье Пушной (2015) были приведены аргументы, свидетельствующие о том, что в реальной рыночной экономике цена производства, всей продукции каждого из рассмотренных подразделений пропорциональна трудовой стоимости. В модели экономики с тремя подразделениями обмен по трудовой стоимости, по-видимому, должен мало отличаться от обмена по ценам производства. Причина этого – в действии статистических законов, в силу которых относительные отклонения стоимости от цены производства (выпущенной продукции) малы внутри каждого подразделения (детали смотри Пушной (2015), часть вторая, выводы - на стр. 126).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Ниже приведён текст программы в “Mathematica 8.1”, которая использовалась для построения графиков, приведённых в статье.

```
a1=0.5
a2=0.3
a3=0.2
l1=0.3
l3=0.5
w=1
w4=2
w5=3
w6=4
w0=(1-a1)/(a2 l1)
Print["График-4 П2(w;l2)"]
Plot3D[(-1) w l2^2+(1-a2 w l1/(1-a1)) l2 (Sign[-w l2^2+(1-a2 w l1/(1-a1)) l2]+1)/2,{w,0.,1},{l2,0,1.5},AxesLabel->{"w","l2","П2"}]
Print["График-5 П2max(w)"]
Plot[1/(4 w)+(a2 l1/(2 (1-a1)))^2 w-a2 l1/(2 (1-a1)),{w,0,12},AxesLabel->{"w","П2max"}]
Print["График-6"]
Plot[{x w0/(w4+x w0),x w0/(w5+x w0),x w0/(w6+x w0),x/(1-x)},{x,0,0.35},PlotRange->All,AxesLabel->{"x","y"}]
Print["График-7"]
Plot[{2 x/(1-Sqrt[1-4 x]),2 x/(1+Sqrt[1-4 x]),x/(1-x),2 x/(1+x)},{x,0,0.5},PlotRange->All,AxesLabel->{"x","y"}]
Print["График-8 П2max(x)"]
Plot[x^2/(w0 (1-2 x)),{x,0,0.5},AxesLabel->{"x","П2max"}]
Print["График-9 m(x)"]
Plot[x/(1-x),{x,0,0.5},PlotRange->All,AxesLabel->{"x","m"}]
Print["График-10 П2(x;y)"]
Plot3D[(y-x)/(w0 (1-y)),{x,0,0.1},{y,0,0.1},AxesLabel->{"x","y","П2"},Exclusions->{y==1}]
Print["График-11 П2(m;y)"]
Plot3D[(m/(1+m)) (y/(1-y)) (1/w0)),{m,0.,5},{y,0,0.1},AxesLabel->{"m","y","П2"},Exclusions->{y==1}]
Print["График-12 P1(l1;l2)"]
Plot3D[(-w l2) (1-a1)-w a2 l1)/(w a2 l1+a1+w l2 (1-a1)),{l1,0.,1},{l2,0.,1},AxesLabel->{"l1","l2","P1"}]
Print["График-13 P2(l1;l2)"]
Plot3D[(-w (1-a1) l2^2+(1-a1-a2 w l1) l2)/(w (1-a1) l2^2+a2 w l1 l2+a2 l1),{l1,0.,1},{l2,0.,1},AxesLabel->{"l1","l2","P2"}]
Print["График-14 P3(l1;l2)"]
Plot3D[l3 (1-a1-w (l2 (1-a1)+a2 l1))/(w l3 (l2 (1-a1)+a2 l1)+a3 l1),{l1,0.,1},{l2,0.,1},AxesLabel->{"l1","l2","P3"}]
Print["График-15 P1(m)"]
Plot[(1-a1) m/(1+a1 m),{m,0.,1},AxesLabel->{"m","P1"}]
Print["График-16 P2(m;y)"]
Plot3D[m y/(1+m (1-y)),{m,0.,1},{y,0.,1},AxesLabel->{"m","y","P2"}]
Print["График-17 P3(m;y)"]
Plot3D[m w l3/(w l3+a3 (1-y)/a2),{m,0.,1},{y,0.,1},AxesLabel->{"m","y","P3"}]
Print["Дополнительные графики"]
Print["w(x;y)"]
Plot3D[w0 x (1-y)/y,{x,0.,1},{y,0.,1.2},AxesLabel->{"x","y","w"}]
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Excel – файл, который содержит полученные выше формулы и даёт возможность, меняя параметры системы, наблюдать, как меняются цены, издержки, прибыли и рентабельности.

ССЫЛКИ.

1. Калюжный В. В. (2016). Об одной неудачной защите диссертации на соискание учёной степени доктора экономических наук. Интернет ресурс:
<http://vvk61204.socionet.ru/files/Kaliuzhnyi18.pdf>
2. Пушной Г. С. (2014). Решение проблемы трансформирования стоимостей в цены производства в модели простого воспроизводства с тремя подразделениями – II. Интернет ресурс:
http://www.socintegrum.ru/Pushnoi_2015_1/Pushnoi_2015_1.pdf